

13 Noções de Geometria Plana

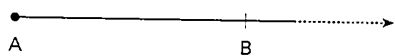
- *Reta* determinada pelos pontos A e B.

Indica-se: \overleftrightarrow{AB}



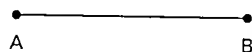
- *Semi-reta* de origem no ponto A e que passa pelo ponto B.

Indica-se: \overrightarrow{AB}



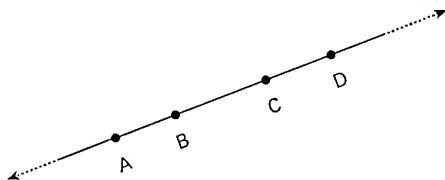
- *Segmento* de reta de extremidades A e B.

Indica-se: \overline{AB}



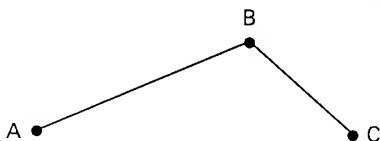
- *Pontos colineares* ou *alinhados* são pontos que pertencem à mesma reta.

Exemplo: Os pontos A, B, C, D, ... da figura

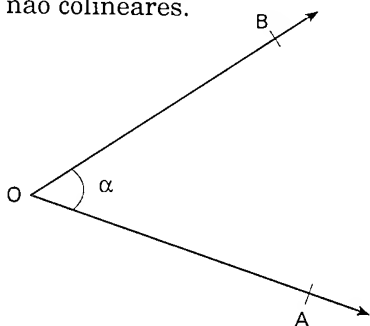


- *Dois segmentos consecutivos* são dois segmentos de extremidade comum.

Exemplo: Os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} da figura:



- *Ângulo* é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.



Nomenclatura:

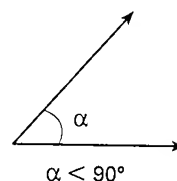
O vértice

\overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} lados

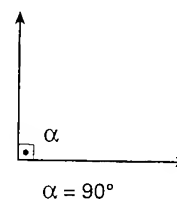
$\sphericalangle AOB$ ângulo

$\hat{A}OB = \alpha$ medida em graus

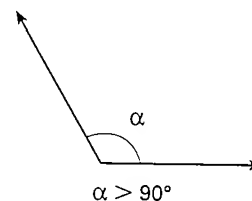
- *Ângulo agudo*



- *Ângulo reto*

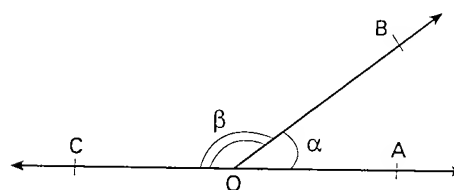


- *Ângulo obtuso*



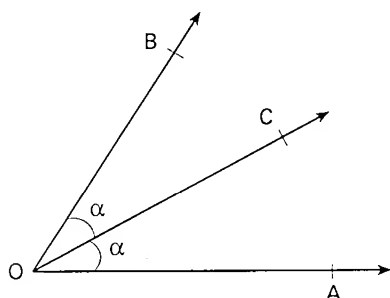
- *Dois ângulos adjacentes* são dois ângulos de mesmo vértice que têm um lado comum e os outros dois lados são semi-retas opostas.

Exemplo: Os ângulos AOB e BOC de medidas α e β são ângulos adjacentes.



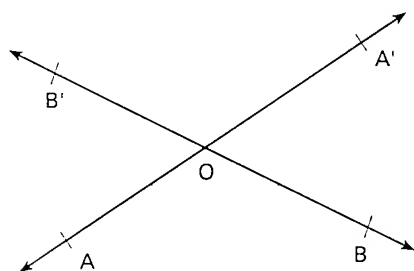
- *Bissetriz de um ângulo* é a semi-reta de origem no vértice desse ângulo que determina dois ângulos consecutivos de mesma medida.

Exemplo: Na figura a semi-reta \vec{OC} é a bissetriz do ângulo AOB.



- *Ângulos opostos pelo vértice* são ângulos de vértice comum e os lados de um deles são semi-retas opostas aos lados do outro.

Exemplo: Na figura os ângulos AOB e A'OB' são opostos pelo vértice.



- *Dois ângulos complementares* são dois ângulos cujas medidas somam 90° .

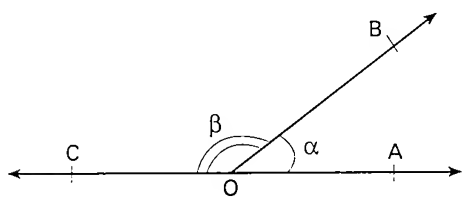
Exemplo: 30° e 60° .

- *Dois ângulos suplementares* são dois ângulos cujas medidas somam 180° .

Exemplo: 80° e 100° .

- *Dois ângulos adjacentes* são suplementares.

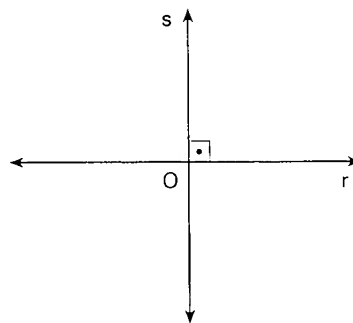
Exemplo: Os ângulos adjacentes AOB e BOC conforme figura.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

- *Retas perpendiculares entre si* são duas retas concorrentes que formam ângulo reto.

Exemplo: As retas r e s da figura são perpendiculares.



■ Ângulos

SÉRIE I

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

- 1) 35°
- 2) 40°
- 3) 60°
- 4) 75°

Exemplo: 20°

Devemos ter: $90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

Resp.: 70°

SÉRIE II

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

- 1) 70°
- 2) 95°
- 3) 60°
- 4) 135°

Exemplo: 50°

Devemos ter: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

Resp.: 130°

SÉRIE III

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

- 1) $43^\circ 25'$
- 2) $61^\circ 13'$
- 3) $72^\circ 47'$
- 4) $83^\circ 09'$

Exemplo: $37^\circ 14'$

$$\begin{array}{r} 1^\circ \text{ passo: Algoritmo } 90^\circ \\ - 37^\circ 14' \\ \hline \end{array}$$

2º passo: 1° corresponde a $60'$.

3º passo: $90^\circ = 89^\circ 60'$.

$$\begin{array}{r} 4^\circ \text{ passo: Preparar e calcular: } 89^\circ 60' \\ - 37^\circ 14' \\ \hline 52^\circ 46' \end{array}$$

Resp.: $52^\circ 46'$

SÉRIE IV

Calcular o complemento dos seguintes ângulos:

- 1) $43^{\circ}25'18''$
- 2) $61^{\circ}13'27''$
- 3) $72^{\circ}47'13''$
- 4) $83^{\circ}09'52''$

Exemplo: $37^{\circ}14'36''$

1º passo: 1' corresponde a 60"

2º passo: Preparar e calcular:

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \qquad 89^{\circ}60' \qquad 89^{\circ}59'60'' \\ -37^{\circ}14'36'' \quad -37^{\circ}14'36'' \quad -37^{\circ}14'36'' \\ \hline \qquad \qquad \qquad 52^{\circ}45'24'' \end{array}$$

Resp.: $52^{\circ}45'24''$

SÉRIE V

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

- 1) $73^{\circ}28'$
- 2) $85^{\circ}36'$
- 3) $100^{\circ}12'$
- 4) $147^{\circ}41'$

Exemplo: $37^{\circ}46'$

$$\begin{array}{r} \text{Devemos ter:} \quad 180^{\circ} \qquad 179^{\circ}60' \\ - 37^{\circ}46' \quad - 47^{\circ}46' \\ \hline \qquad \qquad \qquad 132^{\circ}14' \end{array}$$

Resp.: $132^{\circ}14'$

SÉRIE VI

Calcular o suplemento dos seguintes ângulos:

- 1) $73^{\circ}28'47''$
- 2) $85^{\circ}26'19''$
- 3) $100^{\circ}12'32''$
- 4) $147^{\circ}41'08''$

Exemplo: $37^{\circ}46'38''$

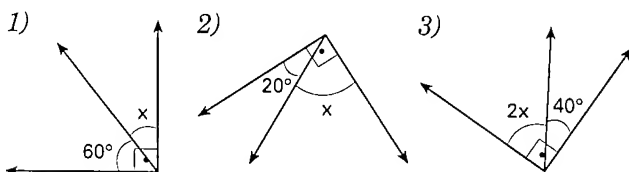
Devemos ter:

$$\begin{array}{r} 180^{\circ} \qquad 179^{\circ}60' \qquad 179^{\circ}59'60'' \\ -37^{\circ}46'38'' \quad -37^{\circ}46'38'' \quad -37^{\circ}46'38'' \\ \hline \qquad \qquad \qquad 142^{\circ}13'22'' \end{array}$$

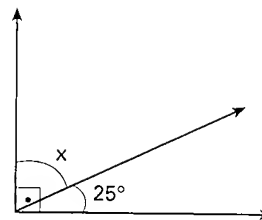
Resp.: $142^{\circ}13'22''$

SÉRIE VII

Em cada figura calcular o valor de x:



Exemplo:



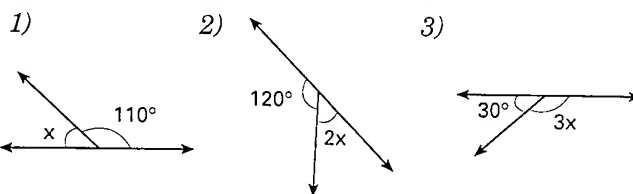
Os ângulos sendo adjacentes e complementares, devemos ter:

$$x + 25^{\circ} = 90^{\circ} \therefore x = 90^{\circ} - 25^{\circ} \therefore x = 65^{\circ}$$

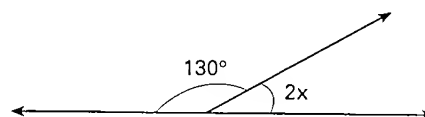
Resp.: $x = 65^{\circ}$

SÉRIE VIII

Em cada figura calcular o valor de x:



Exemplo:



Os ângulos sendo adjacentes e suplementares, devemos ter:

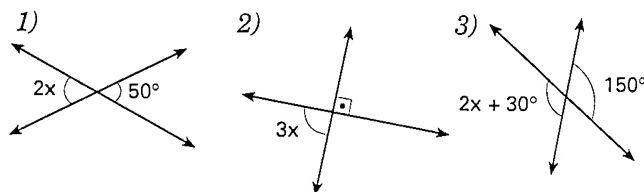
$$2x + 130^{\circ} = 180^{\circ} \therefore 2x = 180^{\circ} - 130^{\circ} \therefore$$

$$\therefore 2x = 50^{\circ} \therefore x = 25^{\circ}$$

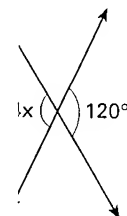
Resp.: $x = 25^{\circ}$

SÉRIE IX

Em cada figura calcular o valor de x:



Exemplo:



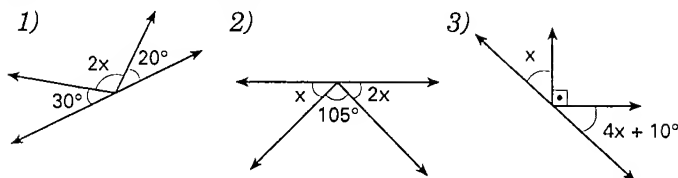
Os ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.

$$\text{Daí, } 4x = 120^{\circ} \therefore x = \frac{120^{\circ}}{4} \therefore x = 30^{\circ}$$

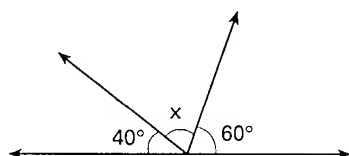
Resp.: $x = 30^{\circ}$

SÉRIE X

Em cada figura calcular o valor de x :



Exemplo:



Devemos ter:

$$40^\circ + x + 60^\circ = 180^\circ \therefore$$

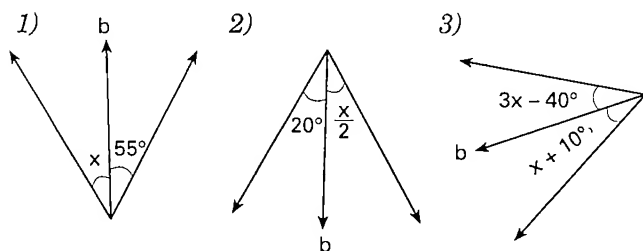
$$\therefore x + 100^\circ = 180^\circ \therefore x = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\therefore x = 80^\circ$$

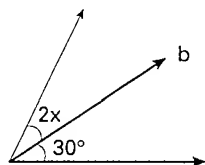
Resp.: $x = 80^\circ$

SÉRIE XI

Em cada figura, a semi-reta b é bissetriz do ângulo; calcular o valor de x :



Exemplo:



Devemos ter:

$$2x = 30^\circ \therefore x = \frac{30^\circ}{2} \therefore x = 15^\circ$$

Resp.: $x = 15^\circ$

SÉRIE XII

Resolva os problemas:

- 1) Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 40° . Achar as medidas dos ângulos.
- 2) Dois ângulos são complementares e a medida de um deles é o dobro da medida do outro. Quais são as medidas dos ângulos?
- 3) Dois ângulos são complementares e a razão das medidas é $\frac{3}{7}$. Achar as medidas dos ângulos.

Exemplo: Dois ângulos são complementares e a medida de um excede a do outro de 20° . Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 20^\circ \end{cases}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{110^\circ}{2} \therefore x = \frac{110^\circ}{2} \therefore x = 55^\circ$$

Substituindo $x = 55^\circ$ na primeira equação, vem:

$$55^\circ + y = 90^\circ \therefore y = 90^\circ - 55^\circ \therefore y = 35^\circ$$

Resp.: 35° e 55°

SÉRIE XIII

Resolver os problemas:

- 1) Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao dobro da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.
- 2) Dois ângulos são suplementares e a medida de um excede a do outro de 70° . Quais são as medidas dos ângulos?
- 3) Dois ângulos são suplementares e a razão das medidas é $\frac{3}{7}$. Quais são as medidas dos ângulos?

Exemplo: Dois ângulos são suplementares e a medida de um deles é igual ao triplo da medida do outro. Achar as medidas dos ângulos.

Resolução:

Sejam x e y as medidas procuradas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 180^\circ & (1) \\ x = 3y & (2) \end{cases}$$

Substituir (2) em (1), temos:

$$3y + y = 180^\circ \therefore 4y = 180^\circ \therefore$$

$$\therefore y = \frac{180^\circ}{4} \therefore y = 45^\circ$$

Substituindo $y = 45^\circ$ em (2), vem:

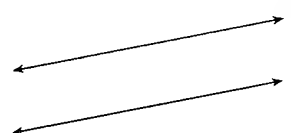
$$x = 3 \cdot 45^\circ \therefore x = 135^\circ$$

Resp.: 45° e 135°

■ Retas paralelas

a) **Definição:** Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, são coplanares e não têm ponto comum.

Indica-se: $r \parallel s$ e $r \nparallel s$

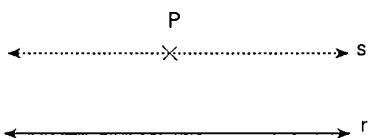


➡ Nota

Retas coplanares são retas de um mesmo plano.

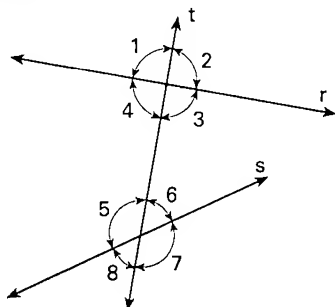
b) *Postulado das paralelas* (Euclides)

Por um ponto fora de uma reta, existe uma e apenas uma reta paralela à reta dada.



c) *Duas retas interceptadas por uma transversal*

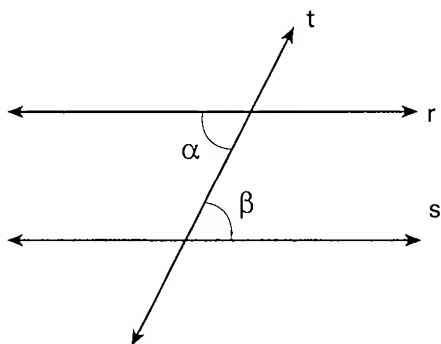
Na figura, as retas r e s são interceptadas por uma reta transversal.



Nomenclatura:

- ângulos alternos internos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{3} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{6} \end{array} \right.$
- ângulos alternos externos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{array} \right.$
- ângulos correspondentes $\left\{ \begin{array}{ll} \hat{1} \text{ e } \hat{5} & \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} & \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$
- ângulos colaterais internos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{array} \right.$
- ângulos colaterais externos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$

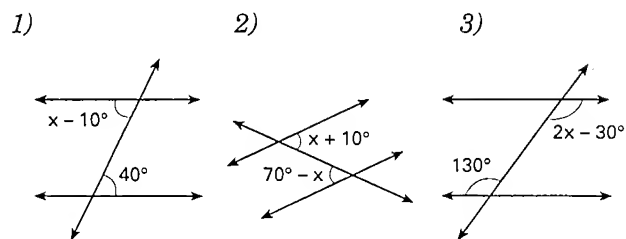
d) *Propriedade*



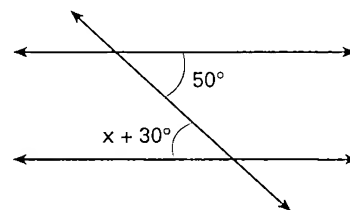
$$\left. \begin{array}{l} r \parallel s, r \neq s \\ t \text{ é transversal} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

SÉRIE I

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:



Exemplo:



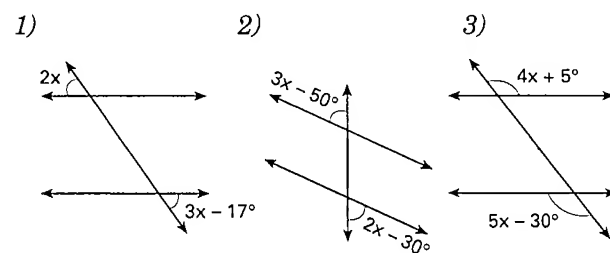
Devemos ter os ângulos alternos internos de medidas iguais:

$$x + 30^\circ = 50^\circ \therefore x = 50^\circ - 30^\circ \therefore 20^\circ$$

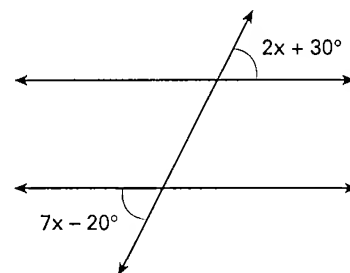
Resp.: $x = 20^\circ$

SÉRIE II

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x:



Exemplo:



Devemos ter os ângulos alternos externos de medidas iguais:

$$7x - 20^\circ = 2x + 30^\circ \therefore$$

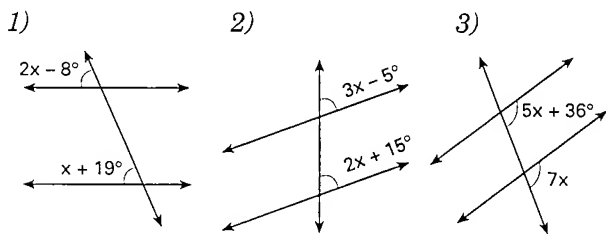
$$\therefore 7x - 2x = 30^\circ + 20^\circ \therefore$$

$$\therefore 5x = 50^\circ \therefore x = 10^\circ$$

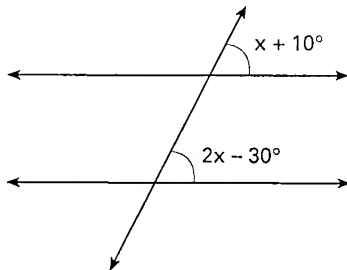
Resp.: $x = 10^\circ$

SÉRIE III

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x :



Exemplo:



Devemos ter os ângulos correspondentes de medidas iguais:

$$2x - 30^\circ = x + 10^\circ \quad \therefore$$

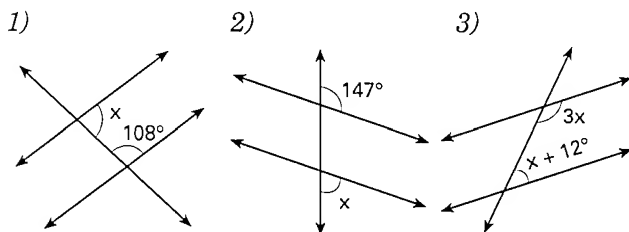
$$\therefore 2x - x = 10^\circ + 30^\circ \quad \therefore$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

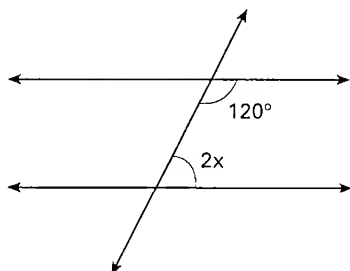
Resp.: $x = 40^\circ$

SÉRIE IV

Em cada figura temos duas retas paralelas e uma transversal. Calcular o valor de x :



Exemplo:



Os ângulos colaterais internos são suplementares. Devemos ter:

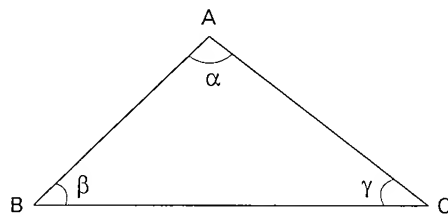
$$2x + 120^\circ = 180^\circ \quad \therefore 2x = 180^\circ - 120^\circ \quad \therefore$$

$$\therefore 2x = 60^\circ \quad \therefore x = 30^\circ$$

Resp.: $x = 30^\circ$

Triângulos

P.1) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

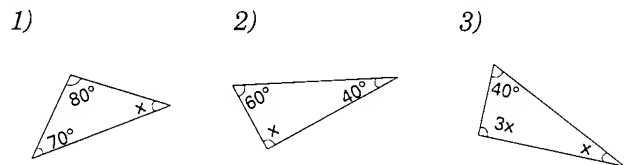


No triângulo ABC da figura, temos:

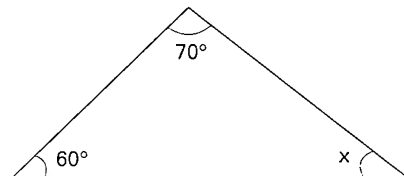
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

SÉRIE I

Em cada triângulo calcular o valor de x :



Exemplo:



Devemos ter:

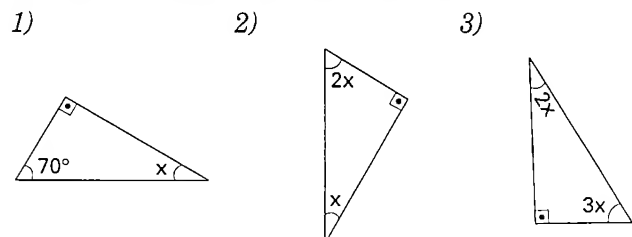
$$x + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \quad \therefore x + 130^\circ =$$

$$= 180^\circ \quad \therefore x = 180^\circ - 130^\circ \quad \therefore x = 50^\circ$$

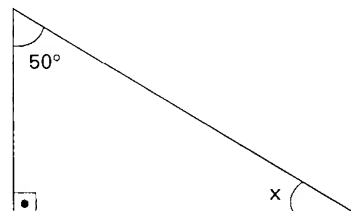
Resp.: $x = 50^\circ$

SÉRIE II

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x :



Exemplo:



Devemos ter:

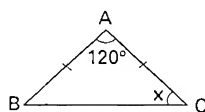
$$x + 50^\circ = 90^\circ \quad \therefore x = 90^\circ - 50^\circ \quad \therefore x = 40^\circ$$

Resp.: $x = 40^\circ$

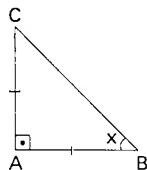
SÉRIE III

Em cada triângulo isósceles $AB = AC$, calcular o valor de x :

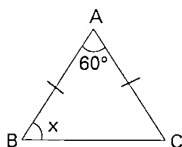
1)



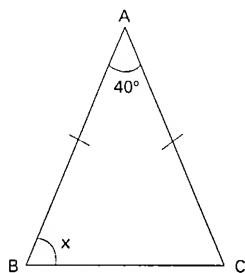
2)



3)



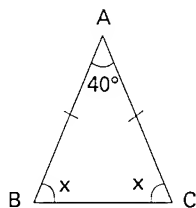
Exemplo:



Num triângulo isósceles, os ângulos da base (lado desigual) têm medidas iguais.

Devemos ter:

$$\hat{B} = \hat{C} = x \quad e$$



portanto :

$$x + x + 40^\circ = 180^\circ \therefore 2x = 180^\circ - 40^\circ \therefore$$

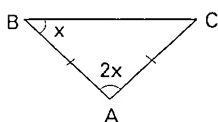
$$\therefore 2x = 140^\circ \therefore x = 70^\circ$$

Resp.: $x = 70^\circ$

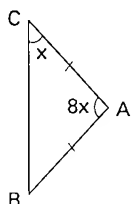
SÉRIE IV

Em cada triângulo isósceles ($AB = AC$), calcular o valor de x :

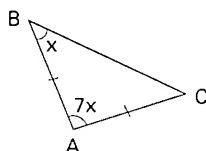
1)



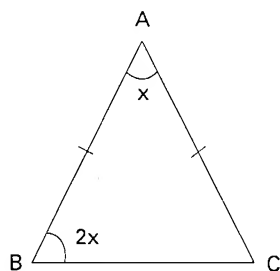
2)



3)



Exemplo:



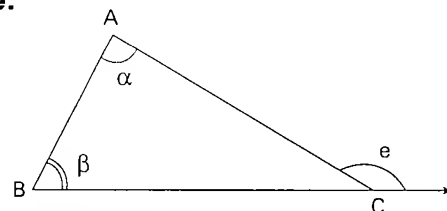
Devemos ter: $\hat{B} = \hat{C} = 2x$ e portanto $x + 2x + 2x = 180^\circ \therefore 5x = 180^\circ \therefore$

$$x = \frac{180^\circ}{5} \therefore$$

$$\therefore x = 36^\circ$$

Resp.: $x = 36^\circ$

P.2) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.



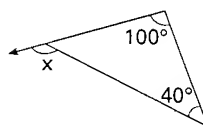
No triângulo ABC da figura, temos:

$$\hat{e} = \alpha + \beta$$

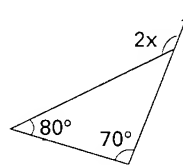
SÉRIE V

Em cada triângulo calcular o valor de x :

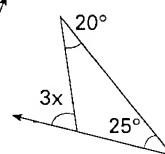
1)



2)



3)

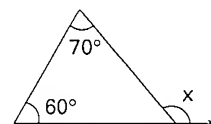


Exemplo:

Devemos ter:

$$x = 60^\circ + 70^\circ \therefore x = 130^\circ$$

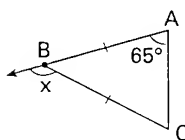
Resp.: $x = 130^\circ$



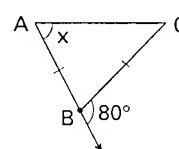
SÉRIE VI

Em cada figura o triângulo ABC é isósceles ($AB = BC$). Calcular o valor de x :

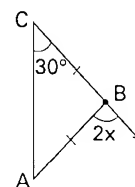
1)



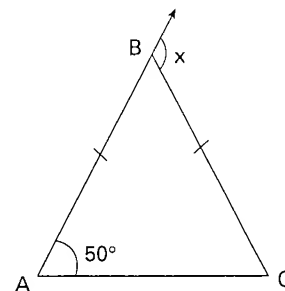
2)



3)

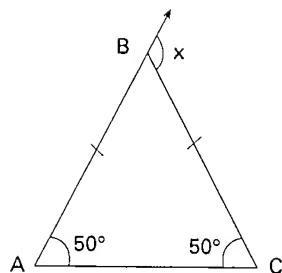


Exemplo:



Devemos ter:

- 1) $\hat{A} = \hat{C} = 50^\circ$
- 2) $x = 50^\circ + 50^\circ$
- $\therefore x = 100^\circ$



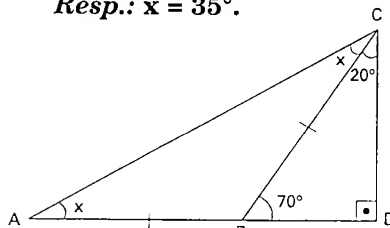
1. $\triangle BCD$ é retângulo, $\hat{B} = 70^\circ$

2. $\triangle ABC$ é isósceles, pois $AB = BC$, então $\hat{A} = \hat{C} = x$.

3. $\angle CBD$ é externo no $\triangle ABC$, então:

$$x + x = 70^\circ \therefore 2x = 70^\circ \therefore x = 35^\circ$$

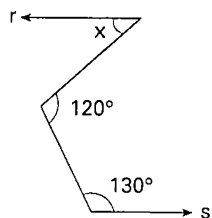
Resp.: $x = 35^\circ$.



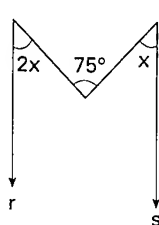
SÉRIE VIII

Em cada figura as retas r e s são paralelas. Calcular o valor de x :

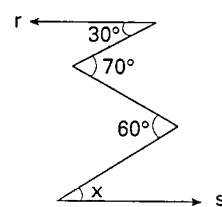
1)



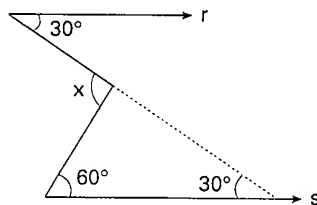
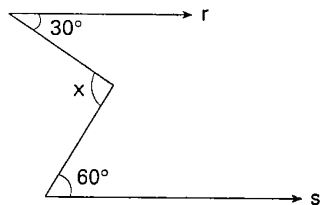
2)



3)



Exemplo:

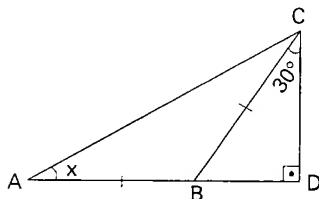


$$x = 60^\circ + 30^\circ \therefore x = 90^\circ$$

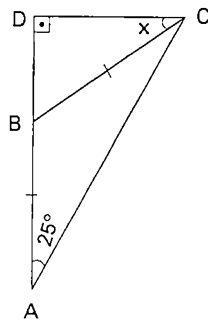
SÉRIE VII

Em cada figura $AB = BC$, calcular o valor de x :

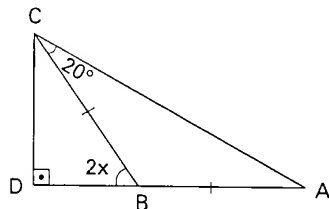
1)



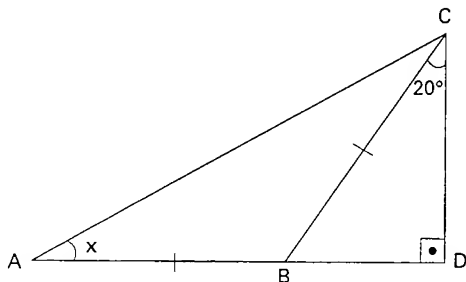
2)



3)



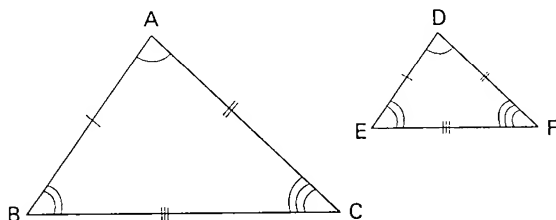
Exemplo:



14 Semelhança de Triângulos

1. Preliminares

Considere os triângulos ABC e DEF



e sejam as correspondências vértice a vértice a seguir indicadas:

$$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F.$$

Ângulos correspondentes:

$$\angle A \leftrightarrow \angle D, \angle B \leftrightarrow \angle E \text{ e } \angle C \leftrightarrow \angle F.$$

Lados correspondentes:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}, \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF} \text{ e } \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}.$$

2. Definição

Dois triângulos que têm os *ângulos correspondentes* com medidas iguais e os *lados correspondentes* com *medidas proporcionais* são chamados *triângulos semelhantes*.

Assim, de acordo com as considerações acima, se

$$\hat{A} = \hat{D}$$

$$\hat{B} = \hat{E} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}, \text{ por definição os triângulos}$$

$$\hat{C} = \hat{F}$$

ABC e DEF são semelhantes.

Indica-se: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

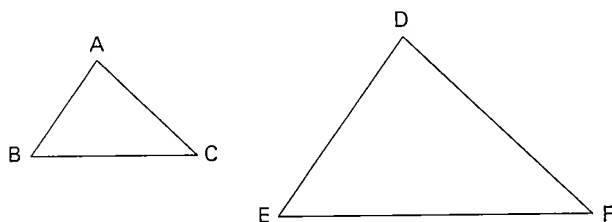
Observe que: aos lados correspondentes se opõem os ângulos correspondentes de medidas iguais.

SÉRIE I

Dados: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

AB, BC, AC e DE.

Calcular: DF e EF.



- 1) AB = 6 cm, BC = 8 cm, AC = 10 cm e DE = 3 cm.
- 2) AB = 4 cm, BC = 5 cm, AC = 6 cm e DE = 12 cm.
- 3) AB = 13 cm, BC = 11 cm, AC = 9 cm e DE = 39 cm.

Exemplo: AB = 5 cm, BC = 7 cm, AC = 9 cm, e DE = 10 cm.

Resolução:

Devemos ter:

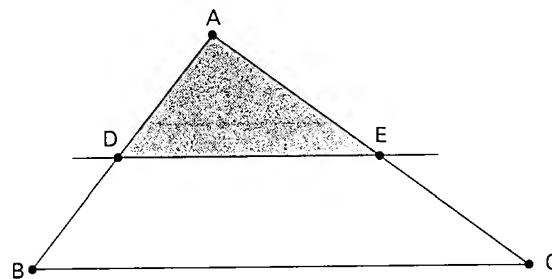
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \therefore \frac{5}{10} = \frac{7}{EF} = \frac{9}{DF}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{9}{DF} = \frac{1}{2} \therefore DF = 18 \text{ cm} \\ \frac{7}{EF} = \frac{1}{2} \therefore EF = 14 \text{ cm} \end{cases}$$

3. Propriedade

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que encontra as retas suportes dos outros dois lados em pontos distintos determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro triângulo.

Na figura, a reta \overleftrightarrow{DE} sendo paralela ao lado \overline{BC} do $\triangle ABC$, então o $\triangle ADE$ é semelhante ao $\triangle ABC$.



Em símbolos:

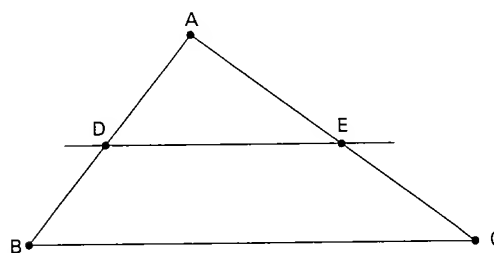
$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

SÉRIE II

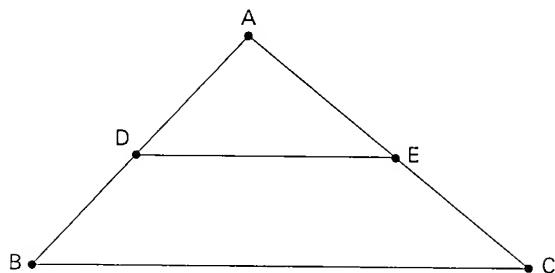
Dados $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ no $\triangle ABC$.

AB, BC, AC e AD.

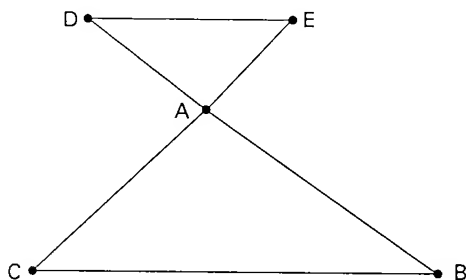
Calcular: DE e AE.



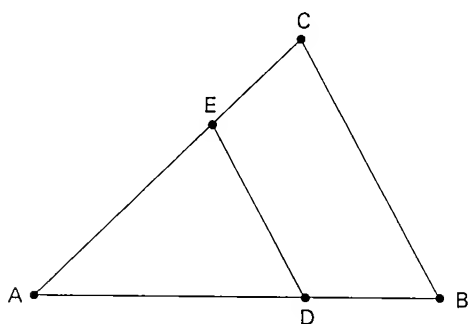
- 1) $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$
 $AC = 12\text{ cm}$ e $AD = 4\text{ cm}$



- 2) $AB = 14\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$
 $AC = 10\text{ cm}$ e $AD = 7\text{ cm}$



- 3) $AB = 16\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$
 $BC = 12\text{ cm}$ e $AD = 12\text{ cm}$



Exemplo: $AB = 18\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$
 $AC = 12\text{ cm}$ e $AD = 12\text{ cm}$

Resolução:

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \frac{12}{18} = \frac{DE}{15} = \frac{AE}{12}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{DE}{15} = \frac{2}{3} \therefore DE = 10\text{ cm} \\ \frac{AE}{12} = \frac{2}{3} \therefore AE = 8\text{ cm} \end{cases}$$

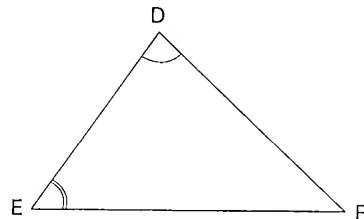
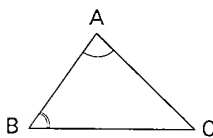
4. Propriedade

Dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes de medidas iguais são semelhantes.

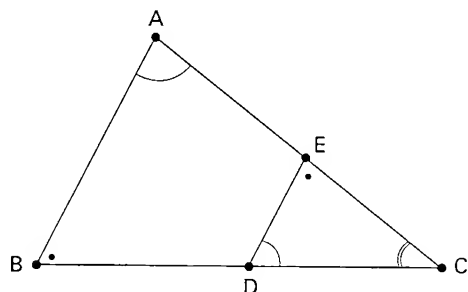
Na figura, sendo $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Em símbolos:

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



Exemplo: Dados: $\triangle ABC$, segmento \overline{DE} , $\hat{A} = \hat{D}$,
 $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$,
 $AC = 12\text{ cm}$ e $DE = 4\text{ cm}$.
 Calcular: CD e EC



Resolução:

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \text{ (dado)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (comum)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

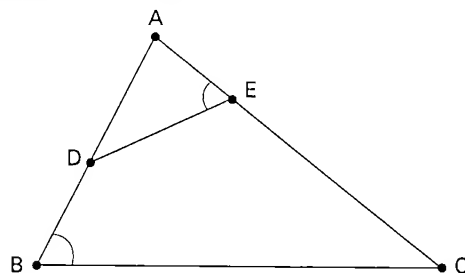
$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC} \therefore \frac{8}{4} = \frac{10}{EC} = \frac{12}{DC}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{10}{EC} = \frac{2}{1} \therefore EC = 5\text{ cm} \\ \frac{12}{DC} = \frac{2}{1} \therefore DC = 6\text{ cm} \end{cases}$$

Exercícios

- 1) Dados $\triangle ABC$, segmento \overline{DE} , $\hat{B} = \hat{E}$,
 $AB = 15\text{ cm}$, $AC = 21\text{ cm}$,
 $BC = 18\text{ cm}$ e $DE = 6\text{ cm}$.

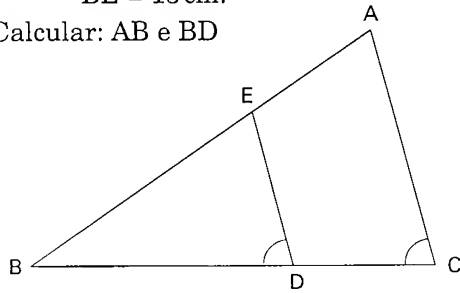
Calcular: AD e AE



2) Dados: $\triangle ABC$, segmento \overline{DE} ,

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \hat{C}, & AC &= 15 \text{ cm} \\ BC &= 36 \text{ cm}, & DE &= 5 \text{ cm} \\ BE &= 13 \text{ cm}.\end{aligned}$$

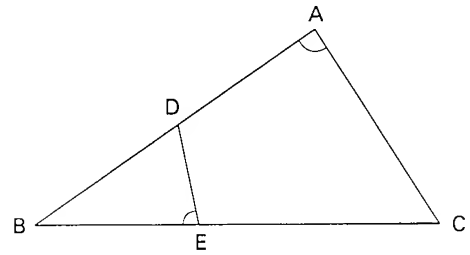
Calcular: AB e BD



3) Dados: $\triangle ABC$, segmento \overline{DE} ,

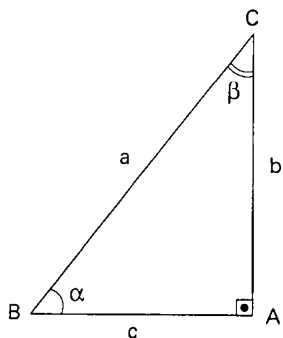
$$\begin{aligned}AB &= 24 \text{ cm}, & AC &= 10 \text{ cm}, \\ BD &= 13 \text{ cm} & \text{e} & BE = 12 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Calcular: BC e DE .



15 Razões Trigonométricas

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, representado na figura abaixo.



Nomenclatura:

1. a é a medida da hipotenusa \overline{BC} .
2. b é a medida do cateto \overline{AC} .
3. c é a medida do cateto \overline{AB} .
4. α e β são as medidas dos ângulos agudos de vértices B e C.
5. As medidas α e β são complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90^\circ$.
6. O cateto de medida b está *oposto* ao ângulo de vértice B.
7. O cateto de medida c está *oposto* ao ângulo de vértice C.
8. O cateto de medida b é *adjacente* ao ângulo de vértice C.
9. O cateto de medida c é *adjacente* ao ângulo de vértice B.
10. A hipotenusa de medida a está *oposta* ao ângulo de vértice A (ângulo reto).

Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

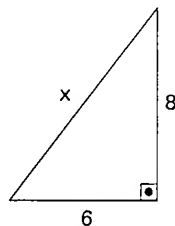
No triângulo ABC, retângulo em A, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

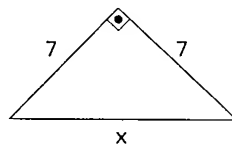
SÉRIE I

Em cada triângulo retângulo calcular a medida x da hipotenusa.

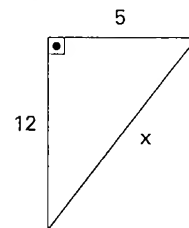
1)



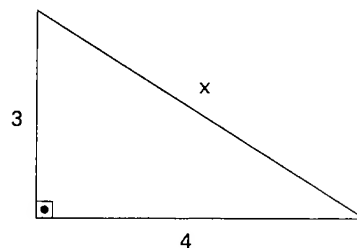
2)



3)



Exemplo:



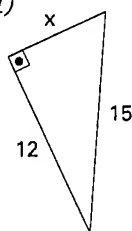
Resolução:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad \therefore x = \sqrt{25} \\ \therefore x = 5$$

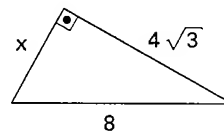
SÉRIE II

Em cada triângulo calcular a medida x do cateto.

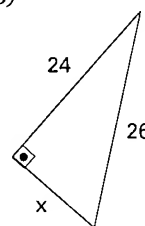
1)



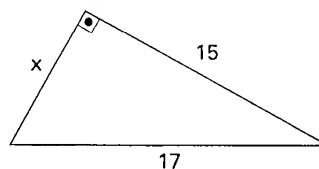
2)



3)



Exemplo:



Resolução:

$$x^2 + 15^2 = 17^2 \quad \therefore x^2 = 289 - 225 = 64 \\ \therefore x = \sqrt{64} \quad \therefore x = 8$$

Definições:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

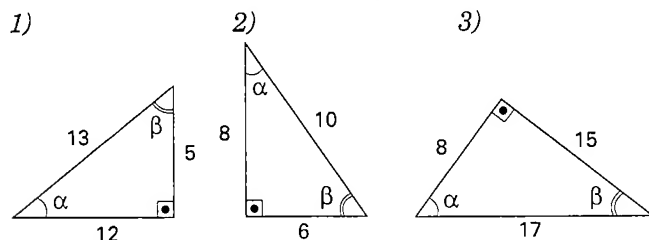
$$\text{cos } \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

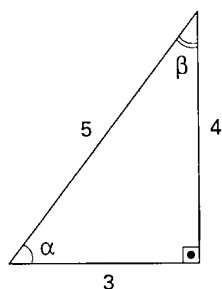
$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} = \frac{c}{b}$$

SÉRIE III

Em cada triângulo retângulo calcular o seno, o cosseno e a tangente de cada ângulo:



Exemplo:



Resolução: $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ $\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$ $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$
 $\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$ $\text{cos } \beta = \frac{4}{5}$ $\text{tg } \beta = \frac{3}{4}$

TABELA

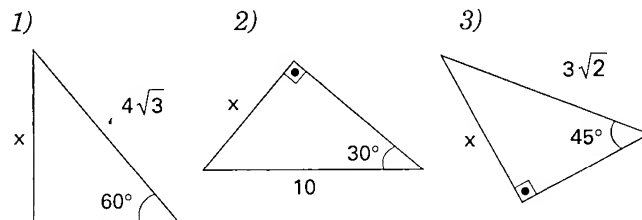
$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg } 45^\circ = 1$
$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sen } 90^\circ = 1$
$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{cos } 90^\circ = 0$
$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$	$\text{tg } 90^\circ = \text{---}$

Observação

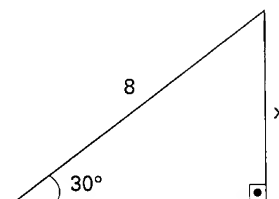
tg 90° não existe.

SÉRIE IV

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:



Exemplo:

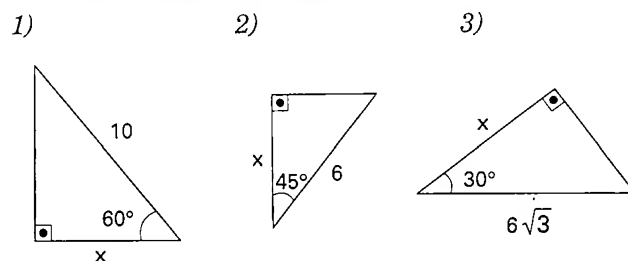


Resolução:

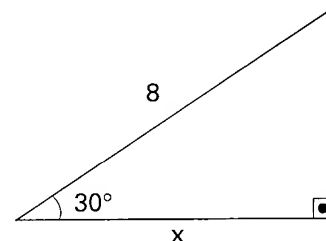
$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \text{sen } 30^\circ \therefore$
 $\therefore x = 8 \cdot \frac{1}{2} \therefore x = 4$

SÉRIE V

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x:



Exemplo:

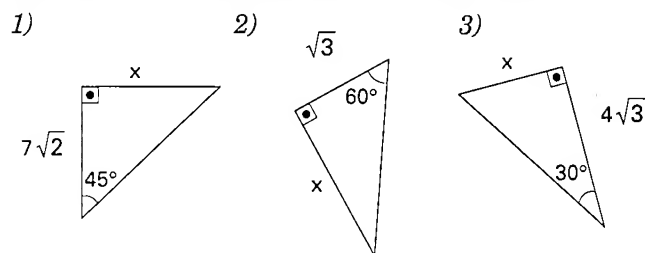


Resolução:

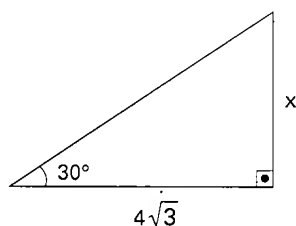
$\text{cos } 30^\circ = \frac{x}{8} \therefore x = 8 \cdot \text{cos } 30^\circ \therefore$
 $\therefore x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x = 4\sqrt{3}$

SÉRIE VI

Em cada triângulo retângulo calcular o valor de x :



Exemplo:



Resolução:

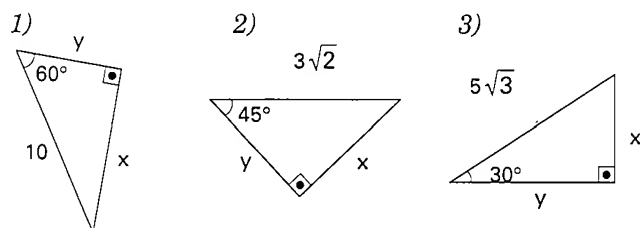
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{4\sqrt{3}} \therefore x = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore x = 4 \cdot \frac{\sqrt{9}}{3} \therefore$$

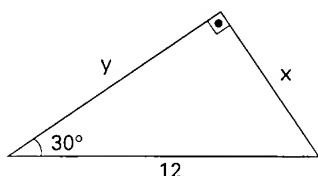
$$\therefore x = \frac{4 \cdot 3}{3} \therefore x = 4$$

SÉRIE VII

Em cada triângulo retângulo calcular os valores de x e y :



Exemplo:



Resolução:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{x}{12} \therefore x = 12 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \therefore$$

$$\therefore x = 12 \cdot \frac{1}{2} \therefore x = 6$$

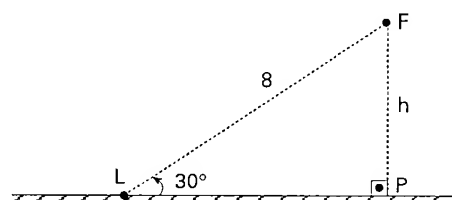
$$\cos 30^\circ = \frac{y}{12} \therefore y = 12 \cdot \cos 30^\circ \therefore$$

$$\therefore y = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore y = 6\sqrt{3}$$

SÉRIE VIII

Exemplo: Um foguete é lançado sob um ângulo de 30° em relação ao solo. Qual a sua altura quando percorreu 8km? (Supor a trajetória retilínea)

Resolução:



No $\triangle LPF$, temos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{8} \therefore h = 8 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

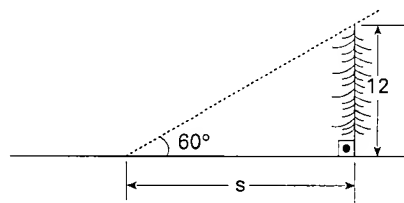
$$\therefore h = 8 \cdot \frac{1}{2} \therefore$$

$$\therefore h = 4$$

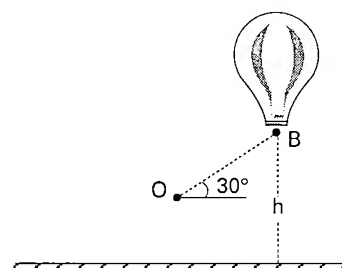
Resp.: 4km

Exercícios

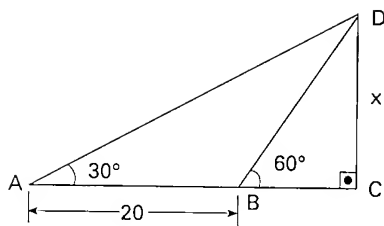
- Um foguete é lançado sob um ângulo de 45° em relação ao solo. Qual a sua distância ao ponto de lançamento quando atingir a altura de 4km? (Supor a trajetória retilínea)
- A figura abaixo representa uma árvore de altura 12 metros. Calcular a sua sombra s quando um raio luminoso forma com o solo um ângulo de 60° .



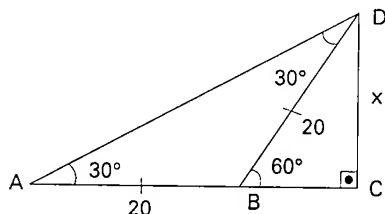
- Um observador O de altura 1,75m vê um balão B sob ângulo de 30° em relação ao solo. No instante em que a distância do observador ao balão é de 146,50m, calcular a altura h do balão em relação ao solo.



Exemplo:



Resolução:



1. No $\triangle ABD$ o ângulo CBD é externo, então $\hat{D} + 30^\circ = 60^\circ \therefore \hat{D} = 30$ e o $\triangle ABD$ é isósceles e portanto $BD = AB = 20$.

2. No $\triangle BCD$, temos: $\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{20} \therefore$

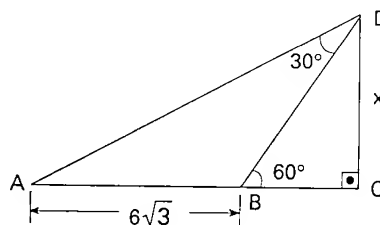
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20} \therefore x = 10\sqrt{3}$$

Resp.: $x = 10\sqrt{3}$

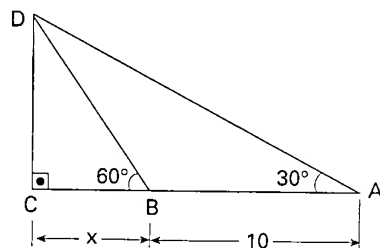
Exercícios

Em cada figura colocar o valor de x:

1)



2)



16 Equação do 2º Grau

1. **Equação do 2º grau**, na incógnita x , é toda equação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

onde a , b e c são números reais.

Exemplos:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$; $a = 1$, $b = -4$ e $c = -5$

b) $2x^2 + 3x = 0$; $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$; $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$

2. **Fórmula resolvente de Báskara**

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada discriminante da equação do 2º grau. Indica-se pela letra grega maiúscula Δ (lê-se: delta).

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo $\Delta \geq 0$ (Δ positivo ou Δ nulo), podemos escrever

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Indicamos por x_1 e x_2 as duas raízes reais, temos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SÉRIE I

Exemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$

1º passo: Cálculo de Δ

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{array} \right\} \therefore \Delta = b^2 - 4ac \\ = (-5)^2 - 4(1)(6) \\ = 25 - 24 \\ = 1$$

2º passo: Aplicação da fórmula de Báskara

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$S = \{2, 3\}$$

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$

2) $x^2 - x - 6 = 0$

3) $x^2 + 3x - 4 = 0$

4) $x^2 + 5x + 6 = 0$

SÉRIE II

Resolver em IR

1) $x^2 - 2x = 0$

2) $2x^2 - 3x = 0$

3) $x^2 - 9 = 0$

4) $4x^2 - 25 = 0$

SÉRIE III

Exemplo: $x^2 - 8x + 16 = 0$

Cálculo de Δ :

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 16 \end{array} \right\} \therefore \Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) \\ = 64 - 64 \\ = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$S = \{4\}$$

➔ Nota

Sendo $\Delta = 0$, diz-se que a equação do 2º grau tem *raiz dupla*, ou seja, $x_1 = x_2$.

Exercícios

Resolver em IR

1) $x^2 - 6x + 9 = 0$

2) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

4) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

SÉRIE IV

Exemplo: $3x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{array} \right\} \therefore \Delta = (-4)^2 - 4(3)(2) \\ = 16 - 24 \\ = -8$$